Cuprins

Capitolul 1

Integrala definită

1.1 Primitive; formule de calcul

Definiţia 1.1.1 *Fie $f : J \to \mathbb{R}$, unde $J \subset \mathbb{R}$ este un interval. Funcţia $F : J \to \mathbb{R}$ se numeşte **primitivă** sau **antiderivată** a funcţiei f pe intervalul J, dacă*
1. F este derivabilă pe J
2. $F'(x) = f(x),\ \forall x \in J$.

Mulţimea tuturor primitivelor se mai numeşte **integrală nedefinită** şi se notează

$$\int f(x)dx = F(x) + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1.1.1 ***(Integrarea prin parti)*** *Dacă $f, g : J \to \mathbb{R}$ sunt derivabile cu derivate continue, atunci funcţiile $fg,\ f'g,\ fg'$ admit primitive si are loc relaţia*

$$\int f(x)g'(x)dx = fg - \int f'(x)g(x)dx. \tag{1.1}$$

Teorema 1.1.2 ***(Schimbarea de variabilă)*** *Fie $I, J \subset \mathbb{R}$ două intervale şi $f : J \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Presupunem că $\varphi : I \to J$ este o funcţie bijectivă, derivabilă cu derivata continuă şi nenulă pe I. Dacă G este o primitivă a funcţiei $(f \circ \varphi)\varphi'$ atunci $G \circ \varphi^{-1}$ este o primitivă a lui f.*

TABELUL PRIMITIVELOR

Notăm prin F o primitivă a funcţiei f şi $J \subset \mathbb{R}$ un interval.

	f	F
1	$x^n, \quad x \in J \subset \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
2	$x^a, \quad x \in J \subset (0, +\infty), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$
3	$a^x, \quad x \in J \subset \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\}$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$
4	$\dfrac{1}{x}, \quad x \in J,\ J \subset (-\infty, 0)$ sau $J \subset (0, +\infty)$	$\ln \lvert x \rvert$
5	$\dfrac{1}{x^2 - a^2}, \quad x \in J \subset \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}, a \neq 0$	$\dfrac{1}{2a} \ln \left\lvert \dfrac{x-a}{x+a} \right\rvert$
6	$f(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}, \quad x \in J \subset \mathbb{R}, a \neq 0$	$\dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a}$
7	$\sin x, \quad x \in J \subset \mathbb{R}$	$-\cos x$
8	$\cos x, \quad x \in J \subset \mathbb{R}$	$\sin x$
9	$\dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in J \subset \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\},\ k \in \mathbb{Z}$	$\tan x$
10	$\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \in J \subset \mathbb{R} \setminus \{k\pi\},\ k \in \mathbb{Z}$	$-\coth$

11	$\tan x, \quad x \in J \subset \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\},\ k \in \mathbb{Z}$	$-\ln\|\cos x\|$
12	$\coth x, \quad x \in J \subset \mathbb{R} \setminus \{k\pi\},\ k \in \mathbb{Z}$	$\ln\|\sin x\|$
13	$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}, a \neq 0, \quad x \in J \subset \mathbb{R}$	$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$
14	$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}, a > 0, \quad x \in J \subset (-\infty, -a)$ sau $J \subset (a, \infty)$	$\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$
15	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, a > 0, \quad x \in J \subset (-a, a)$	$\arcsin \frac{x}{a}$

I. Arătaţi că orice două primitive ale funcţiei f pe un interval J diferă printr-o constantă.

II. Arătaţi că o funcţie care admite primitive pe un interval are *proprietatea lui Darboux*.

III. Arătaţi că următoarele funcţii nu au primitivă pe $\mathbb{R}$

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leqslant 1 \\ 2x, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$

2. $f(x) = [x], x \in \mathbb{R}$ unde prin [ ] s-a notat partea întreagă a numărului x.

3. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ x^3, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

IV. Arătaţi că următoarele funcţii au primitivă pe $\mathbb{R}$

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$

V. Determinaţi o primitivă a funcţiei $f(x) = \dfrac{1}{4+3\cos x}$ pe intervalele $[0,\pi]$ şi $[0,2\pi]$.

VI. Calculaţi primitivele următoarelor funcţii, precizând intervalul pe care acestea sunt definite:

1. $\dfrac{x}{(x-1)^2}$ **2.** $\dfrac{1}{3x^2+5}$ **3.** $\dfrac{1}{7x^2-8}$ **4.** $\dfrac{b}{\sqrt{1-y}}$ **5.** $\dfrac{x^2}{x^2+2}$ **6 .** $\dfrac{1}{\sqrt{7+8x^2}}$

7. $\dfrac{3x+1}{5x^2+1}$ **8.** $\dfrac{x}{x^2-5}$ **9.** $\dfrac{x^2}{1+x^6}$ **10.** $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^6-1}}$ **11.** $\sqrt{\dfrac{\arcsin x}{1-x^2}}$ **12.** $\dfrac{\arctan \frac{x}{2}}{4+x^2}$

13. $\dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}}$ **14.** 4^{2-3x} **15.** $\dfrac{(a^x-b^x)^2}{a^x b^x}$ **16.** $\dfrac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}}$

17. $xe^{-(x^2+1)}$ **18.** $x7^{x^2}$ **19.** $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ **20.** $\dfrac{e^x}{e^x-1}$ **21.** $e^x\sqrt{a-be^x}$ **22.** $\dfrac{a^x}{1+a^{2x}}$

23. $\dfrac{1}{2^x+3}$ **24.** $\dfrac{e^x}{1-e^{2x}}$ **25.** $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ **26.** $\dfrac{\sin(\lg x)}{x}$ **27.** $\sin^2 x$ **28.** $\cos^2 x$

29. $\dfrac{x}{\cos^2(x^2)}$ **30.** $\tan x$ **31.** $\coth x$ **32.** $\dfrac{1}{\sin x\cos x}$ **33.** $x\sqrt[5]{5-x^2}$ **34.** $\dfrac{x^3-1}{x+1}$

35. $\dfrac{x^3-1}{x^4-4x+1}$ **36.** $\dfrac{1}{x\ln^2 x}$ **37.** $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ **38.** $\dfrac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}$ **39.** $\dfrac{1}{e^x+1}$

40. $\ln x$ **41.** $\arctan x$ **42.** $\arcsin x$ **43.** $x\sin x$ **44.** $x\cos 3x$ **45.** $\dfrac{x}{e^x}$

46. $x2^{-x}$ **47.** x^2e^{3x} **48.** $e^{ax}\sin bx$ **49.** $x^2\ln x$ **50.** $\ln^2 x$ **51.** $\ln^n x$

52. $\cos(\ln x)$ **53.** $\dfrac{1}{\sin^n x}$ **54.** $x^n\ln x$ **55.** $\sqrt{x^2+\alpha}$ **56.** $x^n\sin\alpha x$

57. $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ **58.** $\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ **59.** $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-2}}$ **60.** $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ **61.** $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

62. $\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$ **63.** $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ **64.** $\dfrac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}$ **65.** $\dfrac{x^4\arctan x}{1+x^2}$ **66.** $\cos^2\sqrt{x}$

67. $\frac{1}{x^2+2x+5}$ **68.** $\frac{1}{x^2+2x}$ **69.** $\frac{1}{3x^2-x+1}$ **70.** $\frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}$ **71.** $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

72. $\frac{1}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$ **73.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}$ **74.** $\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ **75.** $\frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x62}}$

76. $\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ **77.** $\frac{1}{(x+a)(x+b)}$ **78.** $\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}$ **79.** $\frac{1}{x(x+1)^2}$ **80.** $\frac{x^4}{x^4-1}$

81. $\frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}$ **82.** $\frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}$ **83.** $\frac{1}{x^3+1}$ **84.** $\frac{1}{x^4+x^2+1}$

85. $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ **86.** $\frac{1}{(a^2+x^2)^2}$ **87.** $\frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}$

88. $\frac{1}{3+5\cos x}$ **89.** $\frac{1}{\sin x+\cos x}$ **90.** $\frac{\cos x}{1+\cos x}$ **91.** $\frac{1}{8-4\sin x+7\cos x}$

92. $\cos^3 x$ **93.** $\sin^5 x$ **94.** $\sin^2 x\cos^3 x$ **95.** $\sin^4 x$ **96.** $\sin^2 x\cos^2 x$

97. $\sin 3x\cos 5x$ **98.** $\sin 10x\sin 15x$ **99.** $\sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}$ **100.** $\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$

101. $\frac{1}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$ **102.** $\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}$ **103.** $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ **104.** $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$

105. $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$ **106.** $x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ **107.** $\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}$ **108.** $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

109. $x^3(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$ **110.** $\frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}$ **111.** $\frac{1}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$ **112.** $\frac{1}{x^2(2+x^3)^{\frac{5}{3}}}$

113. $\frac{1}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$

1.2 Integrala definită; aplicaţii

Considerăm funcţia mărginită

$$f:[a,b]\to\mathbb{R},\quad [a,b]\subset\mathbb{R}$$

şi o *diviziune* Δ

$$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \;\; a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

cu *norma diviziunii*

$$\|\Delta\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_{i-1})$$

şi pentru orice $i \in \{1, n\}$ *punctele intermediare* $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ *suma Riemann*

$$\sigma_\Delta = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Definiţia 1.2.1 *Numim* integrală Riemann sau definită *numărul I cu proprietatea că $\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \eta_\varepsilon$ astfel ca pentru orice diviziune Δ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ şi pentru orice alegere a punctelor intermediare are loc*

$$|\sigma_\Delta - I| < \varepsilon$$

Funcţia f se numeşte integrabilă Riemann.

Numărul I este unic determinat şi se notează

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Prin definiţie

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Sume Darboux Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită şi Δ o diviziune oarecare. Notăm

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Şi considerăm *sumele Darboux*

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \quad S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Teorema 1.2.1 *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \eta_\varepsilon$ *astfel ca pentru orice diviziune Δ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$*

$$S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon \tag{1.2}$$

2. *funcţa f este integrabilă.*

Teorema 1.2.2 *Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă Riemann pe intervalul $[a,b]$ şi $f(x) \geqslant 0, \forall x \in [a,b]$ atunci*

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0.$$

Consecinţa 1 Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii integrabile Riemann astfel ca

$$f(x) \leqslant g(x), \ \ \forall x \in [a,b]$$

atunci are loc

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

Consecinţa 2 Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă şi

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \ \ \forall x \in [a,b]$$

atunci

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

Teorema 1.2.3 *(***Leibniz Newton***) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă şi care admite primitive. Atunci pentru orice primitivă F are loc*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Vom folosi notaţia $F(x)|_a^b$.

Teorema 1.2.4 *(***Integrarea funcţiilor continue***) Orice funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă este integrabilă.*

Teorema 1.2.5 *(***Teoremă de medie***) Dacă este o funcţie continuă, atunci există $\xi \in [a,b]$ astfel ca*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi).$$

Teorema 1.2.6 *(***Existenţa primitivelor unei funcţii continue***) Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, funcţia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \;\; \forall x \in [a, b] \tag{1.3}$$

este o primitivă care se anulează în punctul a.

Teorema 1.2.7 *(***Formula de integrare prin părţi***) Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii derivabile, cu derivate continue, atunci*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx. \tag{1.4}$$

Teorema 1.2.8 *(***Schimbarea de variabilă***) Fie $u : [a, b] \to [c, d]$ o funcţie cu proprietăţile: u bijectivă, u şi u^{-1} sunt derivabile, cu derivate continue.*
Fie $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.
Atunci are loc formula

$$\int_a^b f(u(t))dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)(u^{-1})'(x)dx. \tag{1.5}$$

Aplicaţii ale integralei definite

Teorema 1.2.9 *(***Aria unei suprafeţe plane***) Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ este continuă atunci mulţimea*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\; a \leqslant x \leqslant b, \; 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

are arie şi

$$aria(D) = \int_a^b f(x)dx. \tag{1.6}$$

Teorema 1.2.10 *(***Volumul unui corp de rotaţie***) Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ este continuă atunci corpul de rotaţie determinat de f, adică mulţimea*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\; \sqrt{y^2 + z^2} \leqslant r, \; a \leqslant x \leqslant b\}$$

are volum dat de formula

$$vol(V) = \pi \int_a^b f^2(x)dx \tag{1.7}$$

Teorema 1.2.11 *(***Lungimea unui arc de curbă** *) Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie derivabilă cu derivata continuă atunci*

1. graficul lui f are lungime finită

2. lungimea este dată de

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \tag{1.8}$$

Teorema 1.2.12 *(***Aria unei suprafete de rotaţie***) Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie derivabilă cu derivata continuă atunci suprafaţa de rotaţie determinată de f, adică mulţimea*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \sqrt{y^2+z^2} = f(x), a \leqslant x \leqslant b\}$$

are arie dată de

$$aria(S) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \tag{1.9}$$

I. Determinaţi semnul următoarelor integrale

1. $\displaystyle\int_0^{10} e^{x^2} dx$ **2.** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}$

II. Determinaţi cea mai mare dintre integrale (fără a face calculul lor)

1. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2 dx}$ şi $\displaystyle\int_0^1 x dx$

2. $\displaystyle\int_0^1 x^2 \sin^2 x dx$ şi $\displaystyle\int_0^1 x \sin^2 x dx$

3. $\displaystyle\int_0^2 e^{x^2} dx$ şi $\displaystyle\int_1^2 e^x dx$

4. Arătaţi că are loc inegalităţile

a. $\displaystyle\frac{2}{3} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$

b. $\displaystyle\frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Calculaţi limitele următoarelor şiruri

a. $\displaystyle a_n = \frac{3}{n}\left(1 + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} \ldots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right)$

b. $\displaystyle a_n = \frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)$

6. Fie $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Arătaţi ca are loc

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & \text{dacă } f \text{ este pară} \\ 0 & \text{dacă } f \text{ este impară} \end{cases}$$

7. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Arătaţi că are loc

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a + b - x)dx$$

8. Stabiliţi egalitatea

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t} dt$$

9. Determinaţi punctul $\xi \in [1, 3]$ astfel ca funcţia $f(x) = x^2$, $x \in [1, 3]$ să satisfacă

$$\int_1^3 f(x)dx = 2f(\xi).$$

10. Rezolvaţi ecuaţia

$$\int_{\sqrt{2}}^{x} \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}} = \frac{\pi}{12}$$

11. Calculaţi următoarele arii:

a. aria elipsei

b. aria delimitată de $y = 4x - x^2$ şi de abscisă

c. aria delimitaă de $\ln x$ şi $x = e$.

12. Calculaţi lungimile următoarelor curbe

a. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$ (cicloida)

b. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

1.3 Integrala curbilinie

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă unde $D \subset \mathbb{R}^n$ cu $n = 2, 3$.
Fie γ o curbă inclusă în D care este *netedă* de forma

$$(\gamma) \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} , \quad t \in [a, b] \subset \mathbb{R} \qquad (1.10)$$

unde x, y, z sunt funcţii derivabile cu derivata continuă pe $[a, b]$.

Definiţia 1.3.1 *Numim* integrală curbilinie de prima speţă *a funcţiei f*

$$\int_\gamma f(x,y,z)ds = \int f(x(t),y(t),z(t))\ \sqrt{(x')^2(t)+(y')^2(t)+(z')^2(t)}dt \tag{1.11}$$

unde $ds = \sqrt{(x')^2(t)+(y')^2(t)+(z')^2(t)}$ este *elementul de arc*.

Observaţii 1. Integrala este independentă de sensul de parcurs pe curbă.
2. Dacă γ este o curbă plană atunci în ecuaţiile (1.10) vom lua $z = 0$.

Aplicaţii **1. Masa unei curbe netede** γ. Presupunem că în fiecare punct al curbei, masa este o funcţie continuă $f(x, y, z)$, atunci masa curbei este

$$M = \int_\gamma f(x,y,z)ds. \tag{1.12}$$

2. Momentele statice ale unei curbe în raport cu axele de coordonate sunt date de formulele

$$\begin{aligned} M_x &= \int_\gamma xf(x,y,z)ds \\ M_y &= \int_\gamma yf(x,y,z)ds \\ M_z &= \int_\gamma zf(x,y,z)ds \end{aligned} \tag{1.13}$$

Coordonatele centrului de greutate sunt

$$x_C = \frac{M_x}{M}\ \ y_C = \frac{M_y}{M}\ \ z_C = \frac{M_z}{M} \tag{1.14}$$

Integrala curbilinie (IC) de speţa a doua

Fie γ o curbă inclusă în D care este *netedă*, dată ca în (1.10).
Fie funcţiile reale de variabile reale

$$P,\ Q,\ R\ : D \to \mathbb{R},\ \ D \subset \mathbb{R}^3$$

care sunt continue. Presupunem că $\gamma \subset D$.

Definiţia 1.3.2 *Numim intgrala curbilinie de speţa a doua*

$$\begin{aligned} &\int_\gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \\ &= \int_a^b (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+ \\ &\quad +R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt \end{aligned} \tag{1.15}$$

Teorema 1.3.1 *Aria unei multimi plane mărginite de o curbă netedă simplă este*

$$aria(D) = \frac{1}{2}\int_\gamma xdy - ydx \qquad (1.16)$$

Teorema 1.3.2 *În ipotezele anterioare următoarele afirmaţii sunt echivalente*

1. ***IC*** *este independentă de drum*
2. *pentru orice curbă C închisă şi simplă are loc*

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (1.17)$$

Definiţia 1.3.3 *Presupunem că există o funcţie $F : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$ cu derivate parţiale de ordinul întâi continue, astfel ca*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \ \ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y), \ \ \forall (x,y) \in D.$$

Expresia $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ se numeşte diferenţială totală exactă. *Funcţia F se numeşte* primitiva *expresiei $Pdx + Qdy$.*

Teorema 1.3.3 *Presupunem că există o funcţie $F : D \to \mathbb{R}$ cu derivate parţiale continue astfel încât*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \ \ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y), \ \ \forall (x,y) \in D.$$

Atunci are loc

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = F(x(b),y(b)) - F(x(a),y(a)). \qquad (1.18)$$

În particular integrala rezultă independentă de drum.

Teorema 1.3.4 *Dacă integrala $\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ este independentă de drum, atunci funcţia $F : D \to \mathbb{R}, \ D \subset \mathbb{R}^2$ definită prin*

$$F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (1.19)$$

pe orice curbă netedă cu extremităţile $(x_0,y_0), \ \ (x,y) \in D$ satisface

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \ \ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y).$$

Teorema 1.3.5 *Dacă domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$ este simplu conex (fără " goluri") umătoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *este independentă de drum*

2. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \forall (x,y) \in D.$

I. Calculaţi următoarele integrale de speţa întâi

1. $\int_\gamma (x^2+1)ds$, unde (γ) este conturul triunghiului OAB, cu $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$

2. $\int_\gamma xyds, \quad (\gamma) : \{(x,y) \mid |x| + |y| = a\}$

3. $\int_\gamma \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}dx, \quad (\gamma)$: este dreapta de extremităţi $O(0,0), A(1,2)$

4. $\int_\gamma xyds, \quad (\gamma)$: conturul elipsei situat în primul cadran

5. $\int_\gamma yds, \quad (\gamma) : \{(x,y) \mid y^2 = 2px, x \in [0, x_0]\}$

6. $\int_\gamma (x^2+y^2)ds, \quad (\gamma)$: este dreapta de extremităţi $A(a,a), B(b,b)$

7. $\int_\gamma ye^{-x}ds, \quad (\gamma) : \begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = 2\arctan t - t + 3 \end{cases} \ t \in [0,1]$

8. $\int_\gamma xyzds, \quad (\gamma) : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3} \quad t \in [0,1] \\ z = \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$

II. Calculaţi următoarele integrale de speţa a doua pe drumurile indicate

1. $\int_{AB} 2xydx + x^2dy$, unde $AB, \ A(0,0), \ B(1,1)$ este

a. segmentul de dreaptă
b. arcul de pe parabola $y^2 = x$
c. arcul de pe parabola $y = x^2$
d. arcul de pe parabola cubică $y = x^3$

2. $\int_{AB} xydx + (y-x)dy$ pe aceleaşi drumuri ca mai inainte

3. $\int_{\gamma} (x-y^2)dx + 2xydy,$ unde γ este curba de extremităţi $O(0,0),\ B(1,1)$ indicată

a. segmentul de extremităţi OA
b. curba OMA unde M este proiecţia lui A pe axa Ox
c. curba ONA unde N este proiecţia lui A pe axa Oy

4. Aceeşi problemă pentru $\int_{\gamma} (2xy+y^2)dx + (2xy+x^2)dy,$

5. $\int_{\gamma} (x^2+2xy)dy$ pe conturul elipsei, situat în semiplanul superior, parcurs în sens trigonometric.

6. $\int_{\gamma} \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$ unde γ este conturul astroidei, curba cu o reprezentare parametrică de forma $\begin{cases} x = a\sin^3 t \\ y = a\cos^3 t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

7. Este integrala $\int_{\gamma} (x^2+y^2)(xdx+ydy)$ egală cu 0 pe orice contur închis ? Dar $\int_{\gamma} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$?

8. Depinde integrala $\int_{\gamma} (xdy - ydx)$ de drumul de integrare ?

9. Stabiliţi existenţa funcţiei primitive şi găsiţi acestă funcţie în următoarele cazuri:
a. $(4x^3y^3 - 3y^2 + 5)dx + (3x^4y^2 - 6xy - 4)dy$
b. $(10xy - 8y)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy$
c. $(4x^3y^3 - 2y^2)dx + (3x^4y^2 - 2xy)dy$
d. $((x+y+1)e^x - e^y)dx + (e^x - (x+y+1)e^y)dy$

10. Determinaţi o condiţie echivalentă cu faptul că $F(x,y)(xdx+ydy)$, unde $F : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$, domeniu simplu conex, este o diferenţială totală exactă.

1.4 Integrala improprie

Integrale improprii pe interval nemărginit

Fie $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}.$

Definiţia 1.4.1 *f se numeşte* integrabilă *pe* $[a,+\infty)$ *dacă*

1. *f este integrabilă pe intervalul* $[a,b]$, $\forall b\in\mathbb{R}$
2. *există şi este finită limita* $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$. *Vom nota*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{1.20}$$

Vom spune în acest caz că integrala este *convergentă* şi vom nota $\int_a^{\infty} f(x)dx<+\infty$, iar în caz contrar că este *divergentă*.

Definiţia 1.4.2 *Funcţia* $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}$ *se numeşte* absolut integrabilă *pe* $[a,+\infty)$ *dacă*

$$\int_a^{+\infty}\mid f(x)\mid dx<+\infty.$$

Integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *se numeşte* absolut convergentă*.*

Analog se pot defini noţiunile de integrabilitate pe intervale de forma $(-\infty,b]$, unde $b\in\mathbb{R}$ sau $(-\infty,+\infty)$. Menţionăm că în acest al doilea caz, alegem $c\in\mathbb{R}$ şi reducem la situaţiile precedente, dacă realizăm desfacerea

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int_c^{+\infty} f(x)dx.$$

Există situaţii când integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ nu este convergentă şi totuşi există şi este finită limita următoare, numită *valoare principală*

$$vp\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx \tag{1.21}$$

Teorema 1.4.1 *(***Teoremă de caracterizare***) Integrala* $\int_a^{+\infty} f(x)dx<+\infty$ *dacă şi numai dacă* $\forall\varepsilon>0$, $\exists b_\varepsilon$ *astfel încât* $\forall\, b',b''\geqslant b_\varepsilon$ *are loc*

$$\mid\int_{b'}^{b''} f(x)dx\mid<\varepsilon. \tag{1.22}$$

Teorema 1.4.2 *Dacă* $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}$ *este absolut integrabilă atunci este şi integrabilă.*

Teorema 1.4.3 (**Criteriul de comparaţie**) *Fie integralele* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *şi* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.
1. *Presupunem că sunt îndeplinite condiţiile*

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \quad \text{este convergentă} \tag{1.23}$$

$$| f(x) | \leqslant g(x),\ x \geqslant x_1, x_1 \in \mathbb{R} \tag{1.24}$$

atunci rezultă că integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *este absolut convergentă.*
2. *Dacă*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{este divergentă} \tag{1.25}$$

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x),\ x \geqslant x_2, x_2 \in \mathbb{R} \tag{1.26}$$

rezultă că integrala $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *este divergentă.*

Teorema 1.4.4 (**Criteriul cu limită**) 1. *Dacă*

$$\lim_{x\to+\infty} | f(x) | x^{\alpha} < +\infty \quad \text{şi } \alpha > 1 \tag{1.27}$$

atunci $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *este absolut convergentă.*
2. *Dacă*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)x^{\alpha} > 0 \text{ şi } \alpha \leqslant 1 \tag{1.28}$$

atunci $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *este divergentă.*

Integrale improprii de funcţii nemărginite

Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{R}$ o funcţie nemărginită în b.

Definiţia 1.4.3 *Funcţia* f *se numeşte* integrabilă *pe* $[a, b)$, *dacă*
1. f *este integrabilă pe orice interval* $([a, b - \varepsilon]),\ \forall\varepsilon > 0$
2. *există şi este finită limita* $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. *Vom nota*

$$\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{1.29}$$

Integrala se numeşte *convergentă* şi vom nota $\int_a^b f(x)dx < +\infty$ iar în caz contrar, *divergentă*.

Definiţia 1.4.4 *Funcţia* $f : [a, b) \to \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{R}$ *se numeşte* absolut integrabilă *pe* $[a, b)$ *dacă*

$$\int_a^b \mid f(x) \mid dx < +\infty. \tag{1.30}$$

Analog se poate defini integrabilitatea pentru funcţii definite pe $(a, b]$, nemărginite în a. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi f nu este mărginită într-un punct interior intervalului c, studiul convergenţei se poate reduce la cazurile precedente, desfăcând integrala

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Pentru ultima situaţie se defineşte de asemenea noţiunea de *valoare principală* prin următoarea limită (dacă există şi este finită)

$$vp \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right) \tag{1.31}$$

Teorema 1.4.5 *(***Teoremă de caracterizare***) Integrala* $\int_a^b f(x)dx$ *este convergentă dacă şi numai dacă* $\forall \varepsilon > 0$ *există* $\delta > 0$ *astfel ca oricare ar fi* $t', t'' \in [a, b)$, *cu* $0 < b - t' < \delta,\ \ 0 < b - t'' < \delta$ *are loc*

$$\mid \int_{t'}^{t''} f(x)dx \mid < \varepsilon. \tag{1.32}$$

Teorema 1.4.6 *Dacă funcţia* f *este absolut integrabilă pe* $[a, b)$ *atunci ea este integrabilă pe* $[a, b)$.

Teorema 1.4.7 *(***Criteriu de comparaţie***) Fie integralele* $\int_a^b f(x)$ *şi* $\int_a^b g(x)dx$. *Dacă*

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ este convergentă} \tag{1.33}$$

$$\mid f(x) \mid \leqslant g(x),\ x \in [c_1, b),\ \ c_1 \geqslant a \tag{1.34}$$

rezultă că $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *este absolut convergentă.*

Dacă

$$\int_a^b f(x)dx \text{ este divergentă} \tag{1.35}$$

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x),\ x \in [c_2, b),\ \ c_2 \geqslant a \tag{1.36}$$

rezultă $\int_a^b g(x)dx$ *este divergentă.*

Teorema 1.4.8 *(***Criteriul cu limită***)* 1. *Dacă*

$$\lim_{x\to b, x<b} \mid f(x) \mid (b-x)^{\alpha} < +\infty \text{ şi } \alpha < 1 \tag{1.37}$$

atunci $\int_a^b f(x)dx$ *este absolut convergentă.*

2. *Dacă*

$$\lim_{x\to b, x<b} f(x)(b-x)^{\alpha} > 0 \text{ şi } \alpha \geqslant 1 \tag{1.38}$$

atunci $\int_a^b f(x)dx$ *este divergentă.*

I. Studiaţi convergenţa următoarelor integrale, iar dacă este posibil calculaţi limita.

1. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ **2.** $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ **3.** $\int_a^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

4. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}, a \geqslant 1$ **5.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$ **6.** $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$

7. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ **8.** $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ **9.** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

II. Studiaţi convergenţa următoarelor integrale

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$ **2.** $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ **3.** $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

4. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ **5.** $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x}$ **6.** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x+(x^2+1)^{\frac{1}{3}}+5}$

7. $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(x^5+1)^{\frac{1}{2}}}$ **8.** $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$ **9.** $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{1+x^2}dx$

10. $\int_c^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-a)(x-b)}},\ \ b<a<c$ **11.** $\int_0^{+\infty} (e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}})dx$

12. $\int_0^{+\infty} x^{\mu}e^{-ax}dx,\ \ \mu > o, a > 0$

III. Studiaţi convergenţa următoarelor integrale

1. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$ **2.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **3.** $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$ **4.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

5. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x}$ **6.** $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt{|\, x\,|}}$ **7.** $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$ **8.** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

9. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ **10.** $\int_a^b \frac{xdx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$ **11.** $\int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1-x^2)^2}dx$

1.5 Integrala cu parametru

Dacă $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie cu proprietatea că pentru orice $y \in \mathbb{R}$, există integrala

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx \tag{1.39}$$

Teorema 1.5.1 *(***Continuitatea integralei cu parametru***) Dacă $f : [a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este uniform continuă, atunci funcţia F este continuă.*

Teorema 1.5.2 *(***Derivabilitatea integralei cu parametru***) Dacă $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ şi au loc:*

i. *$\forall y \in [c,d]$ există integrala cu parametru $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$;*

ii. *există $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuă pe $[a,b] \times [c,d]$*

atunci F este derivabilă şi

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx. \tag{1.40}$$

Teorema 1.5.3 *(***Teorema lui Leibniz***) Fie integrala cu parametru*

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx,\ y \in [c,d]$$

şi presupunem îndeplinite următoarele ipoteze

i. *funcţiile $\alpha, \beta : [c,d] \to [a,b]$ sunt derivabile,*

ii. *$f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă,*

iii. *există* $\frac{\partial f}{\partial y} : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, *continuă*

atunci F *este derivabilă şi are loc formula*

$$F'(y) = f(\beta(y), y)\beta'(y) - f(\alpha(y), y)\alpha'(y) + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx. \tag{1.41}$$

Teorema 1.5.4 *(***Integrarea unei integrale cu parametru***)* *Fie* $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă, atunci are loc formula*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx. \tag{1.42}$$

Considerăm integralele cu parametru

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \tag{1.43}$$

şi

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx. \tag{1.44}$$

pe care le numim *integralele lui Euler*.

Teorema 1.5.5 *(***Convergenţa integralelor lui Euler***)* *Integralele improprii cu parametru (1.43) şi (1.44) sunt convergente pentru* $p > 0$, *respectiv* $p, q > 0$.

Teorema 1.5.6 *(* **Formule de calcul***)* *Integralele lui Euler satisfac următoarele proprietăţi*

$$\Gamma(1) = 1 \tag{1.45}$$

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \tag{1.46}$$

$$B(p,q) = B(q,p) \tag{1.47}$$

$$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi \tag{1.48}$$

Corolarul 1.5.1 *Din (1.46) deducem*

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{1.49}$$

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)\ldots 31}{2^n}\Gamma(\frac{1}{2}) \tag{1.50}$$

Teorema 1.5.7 *(***Legătura dintre Gamma şi Beta***) Are loc următoarea formulă*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{1.51}$$

Corolarul 1.5.2 *Următoarele afirmatii sunt adevărate*

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{1.52}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{1.53}$$

Teorema 1.5.8 *(***Formula lui Gauss***)*

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^p}{p(p+1)\ldots(p+n)} \tag{1.54}$$

Teorema 1.5.9 *(***Formula complementelor** *) Dacă $p \in (0,1)$ atunci are loc*

$$\Gamma(p)\Gamma(p+1) = \frac{\pi}{\sin \pi p} \tag{1.55}$$

I. Calculaţi următoarele integrale folosind derivarea integralei cu parametru.

1. $F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(y^2 - \sin^2 x)dx,\ y > 1$

2. $F(y) = \int_0^{\infty} \frac{\arctan xy}{x(1+x^2)} dx$

3. $F(y) = \int_0^{b} \frac{x}{(1+xy)^2} dx,\ \ b > 0$

4. $F(y) = \int_0^{b} \frac{dx}{(x^2+y^2)^3}$

5. $F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \ln \frac{1+y\cos x}{1-y\cos x} dx,\ \ y \in (-1,1)$

6. $F(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2}$

7. $F(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx,\ \ a > 0, b > 0$

8. $F(a,b) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx \, dx$

II. Calculaţi schimbând ordinea de integrare

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x}(\cos bx - \cos cx)dx, \;\; a > 0, b, c \in \mathbb{R}$

2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x}(\sin bx - \sin cx)dx, \;\; a > 0, b, c \in \mathbb{R}$

III. Arătaţi că următoarele egalităţi au loc

1. $B(p,q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy$

2 $B(p, 1-p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{1+y} dy, \; 0 < p < 1$

3. $B(p,q) = \dfrac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1) = \dfrac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q) \; p > 1, \; q > 1$

IV. Reduceţi la integralele lui Euler şi stabiliţi natura lor:

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx, \; m, n \in \mathbb{R}$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^m)^{\frac{1}{n}}}, \; m > 0, \; n \in \mathbb{N}$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n} dx \; m, n \in \mathbb{R}$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} dx, \; a > 0, p \in \mathbb{R}$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2} dx$

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx, \; m, n \in \mathbb{R}$

7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx, \; n \in \mathbb{N}.$

Capitolul 2

Ecuaţii diferenţiale

2.1 Ecuaţia diferenţială de ordinul 1

Forma generală e unei ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul 1 este

$$y'(x) = f(x, y) \tag{2.1}$$

unde x este variabila independentă, $y = y(x), \quad x \in (a, b)$ este funcţia necunoscută, $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ este derivata, iar $f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2$ este o funcţie continuă.

Definiţia 2.1.1 *Numim* soluţie *a ecuaţei (2.1) funcţia* $y : (a, b) \to \mathbb{R},\ y = y(x)$ *derivabilă pe* (a, b) *care verifică identic ecuaţia (2.1), adică*

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ \ x \in (a, b).$$

Interpretare geometrică Soluţia este o curbă în planul $x0y$, având în fiecare punct tangentă care variază continuu in raport cu punctul. Curba se numeşte *curbă integrală* şi poate fi dată cartezian explicit, adică $y = y(x)$ sau cartezian implicit adică $F(x, y) = C$. Mulţimea tuturor curbelor soluţie se numeşte *soluţie generală*.
Numim *problemă Cauchy* determinarea unei soluţii a ecuaţiei (2.1) care satisface o condiţie de forma (**??**). Geometric, aceasta revine la determinarea unei curbe integrale care să teacă printr-un punct dat (x_0, y_0). Vom stabili o *teoremă de existenţă şi unicitate* , în anumite ipoteze asupra lui f a soluţiei problemei Cauchy, pe o vecinătate în jurul lui x_0.

1. Ecuaţii de forma $y'(x) = f(x)$

Considerăm problema Cauchy de forma

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

unde $x \in (a, b)$ şi f este o funcţie continuă pe (a, b). Soluţia problemei Cauchy este de forma

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt. \tag{2.3}$$

2. Ecuaţii cu variabile separabile

Considerăm problema Cauchy de forma

$$\begin{cases} y'(x) = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

unde $x \in (a, b)$ şi f este o funcţie continuă pe (a, b) iar g este o funcţie continuă şi nenulă pe (c, d).
Soluţia problemei Cauchy este de forma

$$y(x) = G^{-1}(\int_{x_0}^{x} f(t)dt). \tag{2.5}$$

unde G^{-1} este inversa funcţiei $G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)}dt$.

Exemplu Să rezolvăm ecuaţia

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{x^2y^2}{1+x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Separăm variabilele şi găsim

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{x^2dx}{1+x^2}.$$

Prin integrare obţinem

$$-\frac{1}{y} = x - \arctan x + c.$$

Punând condiţia Cauchy $y(0) = 1$ găsim $c = -1$ şi soluţia este

$$y(x) = \frac{1}{\arctan x - x + 1}.$$

3. Ecuaţia omogenă

Considerăm ecuaţia

$$y'(x) = h(\frac{y}{x}) \tag{2.6}$$

unde h este o funcţie continuă pe un interval (c, d). facem schimbarea de funcţie

$$\frac{y}{x} = u(x)$$

şi prin derivare găsim $y' = u(x) + xu'(x)$, de unde dacă înlocuim în ecuaţie găsim

$$xu'(x) = h(u) - u$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile.

Exemplu Să rezolvăm ecuaţa

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

Observăm că poate fi pusă sub forma

$$y' = \frac{\frac{y}{x}}{1 - (\frac{y}{x})^2}.$$

Prin substituţia $y = xu(x)$ găsim

$$u + xxu' = \frac{u}{1 - u^2}$$

şi ajungem la ecuaţia cu variabile separabile

$$xu' = \frac{u^3}{1 - u^2}.$$

Prin rezolvarea ei găsim curbele

$$\ln \mid cy \mid = -\frac{x^2}{2y^2}.$$

4. Ecuaţii reductibile la cazul omogen

Considerăm ecuaţia

$$y' = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} \tag{2.7}$$

unde $a, b, c, a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$. Dacă $c = c_1 = 0$ atunci ecuaţia este omogenă. Dacă cel puţin c sau c_1 este diferit de 0, atunci facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k \end{cases} \tag{2.8}$$

Se obţine imediat

$$y' = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1}.$$

Cazul I Presupunem că

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.9}$$

Atunci sistemul

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases}$$

are soluţie unică. Alegând h, k soluţii ale acestui sistem şi făcând schimbarea (2.8) obţinem ecuaţia omogenă

$$y_1' = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}. \tag{2.10}$$

Cazul II Presupunem că

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.11}$$

Atunci

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{1}{\lambda}.$$

Alegând $a_1 = \lambda a,\ b_1 = \lambda b$ obţinem ecuaţia

$$y' = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1} \tag{2.12}$$

şi făcând substituţia $z = ax + by$ obţinem ecuaţia cu variabile separabile

$$\frac{z' - a}{b} = \frac{z + c}{\lambda z + c_1}.$$

5. Ecuaţii cu diferenţială totală exactă

Fie ecuaţia

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{2.13}$$

unde $P, Q : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2$ sunt funcţii continue. Presupunem că $Pdx + Qdy$ este diferenţială totală exactă. Atunci există o funcţie de clasă $C^1(D)$ astfel ca $dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$. Atunci soluţia generală este

$$F(x,y) = C,\ \ C \in \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

Metoda factorului integrant

Dacă $Pdx + Qdy$ nu este diferentială totală exactă şi presupunem că suntem pe un domeniu simplu conex, înmulţim ecuaţia cu funcţia μ ; ecuaţia devine

$$\mu P(x,y)dx + \mu Q(x,y)dy = 0.$$

şi punem condiţia ca

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}.$$

Deducem ecuaţia

$$\frac{\partial(Q)}{\partial x} - \frac{\partial(P)}{\partial y} = P\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} \tag{2.15}$$

orice funcţie μ care satisface ecuaţia (2.15) se numeşte *factor integrant*.

Caz particular I μ depinde doar de y; atunci $\dfrac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0$ şi prin integrarea ecuaţiei

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}.$$

se găseşte factorul integrant.

Caz particular II μ depinde doar de x, atunci prin analogie factorul integrant se găseşte ca soluţie a ecuaţiei

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q}.$$

Exemplu Să integrăm ecuaţia

$$(y + xy^2)dx - xdy = 0.$$

Observăm că
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + 2xy \neq -1 = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$
Căutăm un factor integrant care depinde doar de y,
$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{-2(1+xy)}{y(1+xy)}.$$
Prin integrare găsim $\mu = \frac{1}{y^2}$, iar soluţia ecuaţiei este
$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C.$$

6. Ecuaţia diferenţială liniară

Considerăm problema Cauchy care reprezintă determinarea soluţiei ecuaţiei
$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{2.16}$$
care satisface condiţia iniţială
$$y(x_0) = y_0. \tag{2.17}$$
$$y(x) = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(t) e^{\int_{x_0}^{t} P(u)du} \right) e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt}. \tag{2.18}$$
Funcţia definită de (2.18) satisface $y(x_0) = y_0$. Se desprind următoarele etape în rezolvarea unei ecuaţii liniare de forma mai generală
$$a(x)y' + b(x)y = c(x).$$

Pas 1. Împărţim prin $a(x)$ şi găsim ecuaţia
$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Pas 2. Determinăm factorul integrant
$$\mu = e^{\int P(x)dx}$$

Pas 3. Obţinem ecuaţia
$$\frac{d(\mu y)}{dx} = \mu Q(x).$$

Pas 4. Deducem

$$\mu y = \int \mu Q(x)dx + C$$

Pas 5. Soluţia generală este de forma

$$y(x) = \mu(x)^{-1}(\int \mu Q(x)dx + C).$$

Pas 6. Determinăm C din condiţia $y(x_0) = y_0$.
Exemplu Să rezolvăm problema Cauchy

$$\cos x\, y' + y = \sin x, \;\; y(0) = 2.$$

Pas 1. Ecuaţia devine

$$y' + \frac{1}{\cos x} y = \tan x.$$

Pas 2. Factorulul integrant este

$$\mu = e^{\int \frac{dx}{\cos x}} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}.$$

Pas 3. Obţinem ecuaţia

$$\frac{d(\frac{1+\sin x}{\cos x}\, y)}{dx} = \frac{1 + \sin x}{\cos x} \tan x.$$

Pas 4. Deducem

$$\frac{1 + \sin x}{\cos x}\, y = \int \frac{1 + \sin x}{\cos x} \tan x dx = \tan x - x + C.$$

Pas 5. Soluţia generală este

$$y(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \left(\frac{1 + \sin x}{\cos x} - x + C \right).$$

Pas 6. Deducem constanta $C = 1$.

7. Ecuaţia diferenţială Bernoulli

Forma generală este

$$y' + P(x)y = Q(x)\, y^{\alpha}, \;\; \alpha \in \mathbb{R} \tag{2.19}$$

Pentru unele cazuri particulare ale lui α se obţin cazuri de ecuaţii deja studiate. În general împărţim prin y^α şi obţinem

$$\frac{y'}{y^\alpha} + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x).$$

Facem substituţia

$$z(x) = y(x)^{1-\alpha} \tag{2.20}$$

şi obţinem imediat ecuaţia liniară

$$z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x).$$

Exemplu Să rezolvăm ecuaţia

$$y' + \frac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y}.$$

Facem substituţia $z = \sqrt{y}$ şi găsim ecuaţia liniară

$$z' + \frac{x}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}$$

cu soluţia

$$z = (1-x^2)^{\frac{1}{4}}(-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{4}} + C),$$

de unde

$$\sqrt{y} = -\frac{1}{3}(1-x^2) + C(1-x^2)^{\frac{1}{4}}.$$

I. Arătaţi că următoarele funcţii sunt soluţii ale ecuaţiilor diferenţiale indicate
1. $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad y''(x) + y(x) = 0$
2. $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad y''(x) - y(x).$

II. Deduceţi ecuaţia diferenţială a cărei soluţie este $y(x) = e^x(a\cos x + b\sin x)$.

III. Rezolvaţi următoarele ecuaţii diferenţiale

1. $y' = \dfrac{x(2\ln x + 1)}{\sin y + y\cos y}$, **2.** $y - xy' = a(y^2 + y')$ **3.** $y' = e^{2x+3y}$
4. $xyy' = 1 + x + y + xy$ **5.** $(x+y)(dx - dy) = dx + dy$

6. $\begin{cases} \frac{3e^x}{1+e^x}dx + \frac{2}{\sin 2y}dy = 0 \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ **7.** $\begin{cases} xy' + \coth y = 0 \\ y(\sqrt{2}) \end{cases}$

8. $(x+y-1)dx=(x+y+1)dy$ **9.** $\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}$

10. $e^y(1+x^2)\frac{dy}{dx}-2x(1+e^y)=0$ **11.** $(x^{-}yx^2)y'+y^2+xy^2=0$

12. $\begin{cases}(1+x^3)dy-x^2ydx=0\\ y(1)=2\end{cases}$ **13.** $a(xdy+ydx)=xydy$

14. $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx$ **15.** $(x+y)dx+(y-x)dy=0$

16. $x\frac{dy}{dx}+\frac{y^2}{x}=y$ **17.** $(y^2-2xy)dx=(x^2-2xy)dy$

18. $x(x-y)y'=y(x+y)$ **19.** $(\sqrt{xy}-x)dy+ydx=0$

20. $(y^2+2xy)dx+(2x^2+3xy)dy=0$ **21.** $xy'=y(\ln y-\ln x)$

22. $xy'=y+x\cos^2\frac{y}{x}$ **23.** $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0$

23.' $(3y-7x+7)dx+(7y-3x+3)dy=0$ **24.** $y'=\frac{y+x-2}{y-x-4}$

25. $(3y+2x+4)dx-(4x+6y+5)dy=0$ **26.** $y'=\frac{x+2y-3}{2x+y-3}$

27. $(2x-2y+5)y'=x-y+3$ **28.** $(x+y)(dx-dy)=dx+dy$

29. $x(1-x^2)y'+(2x^2-1)y=x^3$ **30.** $(1+y^2)dx=(\arctan y-x)dy$

31. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^3-3$ **32.** $x\ln x\frac{dy}{dx}+y=2\ln x$ **33.** $\cos^2 xy'+y=\tan x$

34. $(1+x^3)y'+6x^2y=1+x^2$ **35.** $x^2y'=3x^2-2xy+1$

36. $(x+2y^3)y'=y$ **37.** $\frac{e^{-y}}{\cos^2 y}dy=dx+xdy$ **38.** $\begin{cases}y'+y\coth x=\frac{4x}{\sin x}\\ y(\frac{\pi}{2})=0\end{cases}$

39. $xy(1+xy^2)y'=1$ **40.** $y'+x\sin 2y=x^3\cos^2 y$ **41.** $xy'+y=x^3y^6$

42. $y'+y\tan x=y^3\cos x$ **43.** $y'+\frac{y\ln y}{x}=\frac{y(\ln y)^2}{x^2}$

44. $\begin{cases}y-y'\cos x=y^2(1-\sin x)\cos x\\ y(0)=2\end{cases}$ **45.** $y'-x^2y=y^2e^{-\frac{1}{3}x^3}$

46. $(5x^4+3x^2y^2-2xy^3)dx+(2x^3y-3x^2y^2-5y^4)dy=0$

47. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$ **48.** $(y\cos x+1)dx+\sin xdy=0$

49. $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+(1-\frac{x}{y})e^{\frac{x}{y}}=0$ **50.** $ye^{xy}dx+(xe^{xy}+2y)dy=0$

2.2 Ecuaţia diferenţială de ordinul n

2.3 Sisteme simetrice

Considerăm sistemul diferenţial de forma

$$x'(t) = f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \tag{2.21}$$

unde $f : D \to R^n$, $D \subset R^n$ este o mulţime deschisă, iar $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ este o funcţie de clasă $C^1(D)$. Reamintim că acest lucru înseamnă faptul că funcţia are derivate parţiale de ordinul întâi continue pe domeniul considerat.
Pe componente, sistemul (2.21) are forma:

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ x_2'(t) = f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n'(t) = f_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Un sistem de forma (2.21) se numeşte *autonom*.

Definiţia 2.3.1 *Funcţia $U : D \to R$, $U(x) = U(x_1, \dots, x_n)$ de clasă $C^1(D_0)$ unde $D_0,\ D_0 \subset D$ este submulţime deschisă, se numeşte* integrală primă *a sistemului* (2.21) dacă
i. nu este identic constantă
ii. $U(\varphi(t)) \equiv c, \ \ c \in R$, pentru orice traiectorie (soluţie) $x = \varphi(t)$ a sistemului (1.1) care rămane în D_0.

Observaţie. Constanta din condiţia ii. depinde de traiectorie.

Exemplul 2.3.1 *Fie sistemul diferenţial*

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2 - x_3 \\ x_2'(t) = x_3 - x_1 \\ x_3'(t) = x_1 - x_2. \end{cases}$$

Funcţiile $U_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ şi $U_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ sunt integrale prime.

Soluţie Prima condiţie din definiţie este evidentă. Pentru a doua, dacă $x = \varphi(t)$ este o soluţie, avem

$$x_1'x_1 + x_2'x_2 + x_3'x_3 = x_1(x_2 - x_3) + x_2(x_3 - x_1) + x_3(x_1 - x_2) = 0,$$

care atrage $d(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0$, deci $U_1(\varphi(t)) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c_1$. Analog, deoarece $x_1' + x_2' + x_3' = 0$, rezultă $x_1 + x_2 + x_3 = c_2$, şi $U_2(\varphi(t)) = x_1 + x_2 + x_3 = c_2$.

Teorema 2.3.1 *(Caracterizarea integralelor prime) Funcţia $U \in C^1(D_0)$ este integrală primă a sistemului* (2.21) dacă şi numai dacă

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}(x) f_1(x) + \frac{\partial U}{\partial x_2}(x) f_2(x) + \ldots + \frac{\partial U}{\partial x_n}(x) f_n(x) = 0, \ \ \forall x \in D_0. \tag{2.22}$$

Definiţia 2.3.2 *Punctul $a \in R^n$ se numeşte* punct critic *al sistemului* (2.21) dacă $f(a) = (f_1(a), \ldots, f_n(a)) = 0$.

Definiţia 2.3.3 *Funcţiile $U_1, U_2, \ldots, U_k$ de clasă C^1 se numesc* independente *într-o vecinătate a punctului $a \in R^n$, dacă matricea iacobiană*

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}(a) \right) \ \ i = 1, \ldots k, \ j = 1, \ldots n, \tag{2.23}$$

are rangul k.

Exemplul 2.3.2 *U_1 şi U_2 din exemplul* (2.3.1) sunt independente în vecinătatea oricărui punct diferit de origine.

Soluţie Pe $R^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ matricea iacobiană

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}(a) \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

are rangul 2.

Teorema 2.3.2 *(Existenţa integralelor prime) Într-o vecinătate a unui punct $a \in R^n$, care nu este critic există exact $n-1$ integrale prime independente.*

Consecinţă Soluţia generală a sistemului (2.21) este de forma

$$\begin{cases} U_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = c_{n-1}, \end{cases} \tag{2.24}$$

unde $U_1, \ldots, U_{n-1}$ sunt integrale prime independente.

Teorema 2.3.3 *Fie $U_1, \ldots, U_{n-1}$ integrale prime ale sistemului* (2.21) independente într-o vecinătate a lui $a \in R^n$ care nu este punct critic şi W o integrală primă oarecare. Atunci există o funcţie $F : R^{n-1} \to R$ de clasă C^1 într-o vecinătate a punctului $(U_1(a)), \ldots, U_{n-1}(a))$ astfel ca

$$W(x) = F(U_1(x), \ldots, U_{n-1}(x)), \tag{2.25}$$

pentru orice x din vecinătate.

Teorema 2.3.4 *(Metoda combinaţiilor integrabile) Dacă există funcţiile $\mu_1, \ldots, \mu_n : D \to R$ continue care satisfac*
1. $\mu_1 f_1 + \ldots + \mu_n f_n = 0$
2. Există o funcţie U de clasă C^1 astfel ca $dU = \mu_1 dx_1 + \ldots \mu_n dx_n$ atunci U este o integrală primă pentru (2.21).

Exemplul 2.3.3 *Să rezolvăm sistemul*

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1. \end{cases}$$

Soluţie Există funcţiile $\mu_1 = x_1, \mu_2 = -x_2$ continue, astfel ca
1. $\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 = x_1 x_2 + (-x_2) x_1 = 0$
2 $x_1 dx_1 - x_2 dx_2 = \frac{1}{2} d(x_1^2 - x_2^2)$.
Urmează că $U(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ este integrală primă, iar soluţia sistemului este

$$x_1^2 - x_2^2 = c.$$

Observaţie Dacă $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 > 0$ pe D, atunci sistemul (2.21) poate fi scris sub forma

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, \ldots, x_n)} \tag{2.26}$$

şi se numeşte *sistem simetric*. Deci soluţia unui sistem simetric dată de (2.24), reprezintă o traiectorie (curbă) inclusă în $n-1$ suprafeţe $U_i(x_1, \ldots, x_n) = c_i,\ i = \overline{1, n-1}$.

Observaţie Dacă sistemul (2.21) nu este autonom, deci are forma generală

$$x' = f(t, x),\ x = (x_1, \ldots, x_n),\ f = (f_1, \ldots, f_n), \tag{2.27}$$

atunci i se asociază sistemul simetric

$$\frac{dx_1}{f_1(t, x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(t, x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(t, x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dt}{1}$$

şi soluţia este intersecţia a n suprafeţe.

Exemplul 2.3.4 *Să rezolvăm sistemul simetric*

$$\frac{dx_1}{x_3 - x_2} = \frac{dx_2}{x_1 - x_3} = \frac{dx_3}{x_2 - x_1}.$$

Soluţie Dacă adunăm rapoartele obţinem o fracţie cu numărătorul $dx_1 + dx_2 + dx_3$ şi numitorul 0. Deci din $d(x_1 + x_2 + x_3) = 0$ deducem $x_1 + x_2 + x_3 = c_1$.
Dacă amplificăm fracţiile cu $x_1,\ x_2,\ x_3$ respectiv şi adunăm rapoartele obţinem $d(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0$, de unde $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c_2$. Deci soluţia este de forma

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c_1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c_2 \end{cases}$$

deoarece din exemplul precedent am obsercat că cele două integrale prime $U_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ şi $U_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ sunt independente.

Observaţie Cunoaşterea a k integrale prime independente $k < n$, permite reducerea numărului de funcţii necunoscute cu k unităţi.

Exemplul 2.3.5 *Să rezolvăm următorul sistem neautonom*

$$\begin{cases} x_1' = tx_2 \\ x_2' = tx_1. \end{cases}$$

Soluţie Sistemul se pune sub forma simetrică

$$\frac{dx_1}{tx_2} = \frac{dx_2}{tx_1} = \frac{dt}{1}.$$

Din primele două relaţii deducem o primă suprafaţă $x_1^2 - x_2^2 = c_1$, iar din ultimile două relaţii în care folosim suprafaţa găsită obţinem $\ln(x_1 + x_2) - \frac{t^2}{2} = c_2$. Deci soluţia este

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = c_1 \\ \ln(x_1 + x_2) - \dfrac{t^2}{2} = c_2. \end{cases}$$

Integralele prime găsite sunt independente deoarece pe domeniul de existenţă rangul matricei

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 & 0 \\ \dfrac{1}{x_1 + x_2} & \dfrac{1}{x_1 + x_2} & -t \end{pmatrix}$$

este 2.

2.3.1 Probleme propuse

1.1 Studiaţi dacă pentru următoarele sisteme şi funcţii U, egalităţile $U = c$ sunt integrale prime. Ce se poate spune despre independenţa lor ?

a $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ $U_1(x,y) = x^2 - y^2,\ \ U_2(x,y) = \ln(x+y) - t,\ \ U_3 = xy.$

b. $\dfrac{dx}{z+3y} = \dfrac{dy}{3(z-x)} = \dfrac{dz}{-x-3y},\ \ U_1(x,y) = 3x - y + 3z,\ \ U_2(x,y) = x^2 + y^2 + z^2.$

Rezolvaţi următoarele sisteme diferenţiale:

1.2 $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x-y}{z-t}, \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x-y}{z-t}, \dfrac{dz}{dt} = x - y + 1$

1.3 $\dfrac{dx}{2y+z} = \dfrac{dy}{z-2x} = \dfrac{dz}{-x-y}$

1.4 $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{x+y}$

1.5 $\dfrac{dx}{x+y} = \dfrac{dy}{y-x} = \dfrac{dz}{z}$

1.6 $\dfrac{dx}{x(y-z)} = \dfrac{dy}{y(z-x)} = \dfrac{dz}{z(x-y)}$

1.7 $\dfrac{dx}{a_2 z - a_3 y} = \dfrac{dy}{a_3 x - a_1 z} = \dfrac{dz}{a_1 y - a_2 x}$

1.8 $\dfrac{dx}{y(x+y)} = \dfrac{dy}{-x(x+y)} = \dfrac{dz}{(x-y)(2x+2y+z)}$

1.9 $\dfrac{dx}{2xz} = \dfrac{dy}{2yz} = \dfrac{dz}{z^2 - x^2 - y^2}$

1.10 $\dfrac{dx}{xy^2} = \dfrac{dy}{x^2 y} = \dfrac{dz}{z(x^2+y^2)}$

1.11 $\dfrac{dx}{x^3 + 3xy^2} = \dfrac{dy}{2y^3} = \dfrac{dz}{2y^2 z}$

1.12 $\dfrac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \dfrac{dy}{-y(x^2+z^2)} = \dfrac{dz}{z(x^2+y^2)}$

1.13 $\dfrac{dx}{-xy^2+x+y} = \dfrac{dy}{x^2y-x-y} = \dfrac{dz}{z(y^2-x^2)}$

1.14 $\dfrac{dx}{x(y^2-z^2)} = \dfrac{dy}{y(z^2-x^2)} = \dfrac{dz}{z(x^2-y^2)}$

1.15 $\dfrac{dx}{z-y} = \dfrac{dy}{x-z} = \dfrac{dz}{y-x}$

1.16 $\dfrac{dx}{x^2-y^2-z^2} = \dfrac{dy}{2xy} = \dfrac{dz}{2xz}$

1.17 $\dfrac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}} = \dfrac{dy}{1} = \dfrac{dz}{2}$

1.18 $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

1.19 $\dfrac{dx}{1+x^2} = \dfrac{dy}{x(2-y)} = \dfrac{dz}{1+z^2}$

1.20 $\dfrac{dx}{1+\sqrt{3zx-y}} = \dfrac{dy}{2} = \dfrac{dz}{1}$

1.21 $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{yz} = \dfrac{dz}{-z^2-1}$

Să se integreze sistemele:

1.22 $\begin{cases} (z-y)^2dy = zdx \\ (z-y)^2dz = ydx \end{cases}$

1.23 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z \\ \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{z^2+1}{y} \end{cases}$

1.24 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 1-\dfrac{1}{z} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{y-x} \end{cases}$

1.25 $\begin{cases} x'(t) = -\dfrac{2tx}{x^2+y^2-t^2} \\ y'(t) = -\dfrac{2ty}{x^2+y^2-t^2} \end{cases}$

2.3.2 Soluţii

1.1 a. U_1, U_2 verifică evident condiţia, iar U_3 nu; primele două sunt independente.

b. Ambele sunt integrale prime şi independente.

1.2 Din primele două deducem $x - y = c_1$, iar ultima ecuaţie devine $dz = (1 + c_1)dt$, de unde $z = (1 + x - y)t + c_2$. Din a doua ecuaţie $\frac{dy}{c_1} = \frac{dt}{c_2 + (1 + c_1)t - t}$ cu soluţia $y - \ln|z - t| = c_3$.

1.3 Au loc $\frac{dy}{z - 2x} = \frac{-2dz}{2x + 2y} = \frac{d(y - 2z)}{z + 2y} = \frac{dx}{2y + z}$, de unde $y - 2z - x = c_1$ şi $xdx + ydy + zdz = 0$.

1.4 Din primele două rapoarte $y = c_1 x$; deducem $\frac{dx + dy}{x + y} = \frac{dz}{x + y}$, de unde $x + y - z = c_2$.

1.5 Sistemul e echivalent cu $\frac{xdx}{x^2 + xy} = \frac{ydy}{y^2 - xy} = \frac{zdz}{z^2}$.

Se obţine $x^2 + y^2 + z^2 = c_1 z^2$; primele două relaţii constituie o ecuaţie omogenă cu soluţia $\sqrt{x^2 + y^2} = c_2 e^{-\text{arctg}\frac{y}{x}}$.

1.6 Avem $\frac{dx}{x(y - z)} = \frac{dy}{y(z - x)} = \frac{dz}{z(x - y)} = \frac{dx + dy + dz}{0} = \frac{\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}}{0}$, deci $x + y + z = c_1,\ xyz = c_2$.

1.7 Au loc $\frac{dx}{a_2 z - a_3 y} = \frac{dy}{a_3 x - a_1 z} = \frac{dz}{a_1 y - a_2 x} = \frac{a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz}{0} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0}$ şi $a_1 x + a_2 y + a_3 z = c_1,\ x^2 + y^2 + z^2 = c_2$.

1.8 Din primele două rapoarte $x^2 + y^2 = c_1$. Avem apoi $\frac{dx + dy}{(x + y)(y - x)} = \frac{dz}{(x - y)(2x + 2y + z)}$, de unde cu schimbarea $x + y = u$, obţinem o ecuaţie liniară cu soluţia $z(x + y) + (x + y)^2 = c_2$.

1.9 Din primele două $y = c_1 x$, apoi

$$\frac{xdx}{2x^2 z} = \frac{ydy}{2y^2 z} = \frac{zdz}{z^3 - zx^2 - zy^2} = \frac{xdx + ydy + zdz}{z(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dx}{2xz},$$

de unde $x^2 + y^2 + z^2 = c_2 x$.

1.10 Din primele două avem $y^2 - x^2 = c_1$. Apoi $\dfrac{ydx + xdy}{xy(x^2 + y^2)} = \dfrac{dz}{z(x^2 + y^2)}$, de unde $c_2 z = xy$.

1.11 Din ultimele două $z = c_1 y$, iar primele două constituie ecuaţie omogenă şi $y^3 + x^2 y = c_2 x^2$.

1.12 Amplificăm fiecare raport cu x, y, z respectiv şi prin adunare $xdx + ydy + zdz = 0$. Apoi $\dfrac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \dfrac{zdy + ydz}{yz(y^2 - z^2)}$, de unde $yz = c_2 x$.

1.13 Amplificăm primele două rapoarte cu x respectiv y adunăm şi obţinem $\dfrac{xdx + ydy}{x^2 - y^2} = \dfrac{dz}{z(y^2 - x^2)}$ de unde $x^2 + y^2 + \ln z^2 = c_1$; amplificăm prima cu yz, a doua cu xz a treia cu xy , adunăm şi egalăm cu a treia fracţie; deducem $xyz - z = c_2$.

1.14 Amplificăm prima cu x, a doua cu y, a treia cu z şi avem $x^2 + y^2 + z^2 = c_1$; apoi amplificăm prima cu yz, a doua cu xz, a treia cu xy şi egalăm cu ultimul raport avem $xyz - z = c_2$.

1.15 Din $dx + dy + dz = 0$ rezultă $x + y + z = c_1$ şi $xdx + ydy + zdz = 0$ rezultă $x^2 + y^2 + z^2 = c_2$.

1.16 Din ultimele două deducem $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$, $y = c_1 z$ şi $\dfrac{xdx + ydy + zdz}{x(x^2 + y^2 + z^2)} = \dfrac{dy}{2xy}$, de unde $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = c_2$.

1.17 Din ultimele două $2y - z = c_1$ şi $\dfrac{dz - dx - dy}{-\sqrt{z - x - y}} = dy$, de unde prin substituţia $z - x - y = t$ deducem $y + 2\sqrt{z - x - y} = c_2$.

1.18 Din primele două $x = yc_1$. Apoi $\dfrac{xdx + ydy + zdz}{x^2 + y^2 + z^2 - z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \dfrac{dz}{z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ de unde prin substituţia $x^2 + y^2 + z^2 = t$, avem $\dfrac{dt}{2(t - z\sqrt{t})} = \dfrac{dz}{z - \sqrt{t}}$; rezultă $\dfrac{dt}{-2\sqrt{t}(z - \sqrt{t})} = \dfrac{dz}{z - \sqrt{t}}$ şi $z + \sqrt{t} = c_2$.

1.19 Din primul şi ultimul $\text{arctg}x - \text{arctg}z = c_1$, iar din primele două $\dfrac{xdx}{1 + x^2} = \dfrac{dy}{2 - y}$ de unde $(1 + x^2)(2 - y)^2 = c_2$.

1.20 Din ultimele două $y - 2z = c_1$ şi $\frac{3dz - dx - dy}{-\sqrt{3z - x - y}} = dz$, de unde rezultă
$\frac{dt}{-\sqrt{t}} = dz$,
$z + 2\sqrt{3z - x - y} = c_2$.

1.21 Din ultimele două $\frac{dy}{y} = -\frac{zdz}{z^2 + 1}$, de unde $y^2(z^2 + 1) = c_1$ şi dacă amplificăm a doua cu z şi a treia cu y, deducem $dx + d(yz) = 0, x + yz = c_2$.

1.22 Poate fi pus sub forma simetrică $\frac{dy}{\frac{z}{(z-y)^2}} = \frac{dz}{\frac{y}{(z-y)^2}} = dx$, de unde din primele două $y^2 - z^2 = c_1$; avem apoi $\frac{d(z - y)}{\frac{y-z}{(z-y)^2}} = dx$, de unde $(z - y)d(z - y) = -dx$ şi $(z - y)^2 + 2x = c_2$.

1.23 Avem forma simetrică $\frac{dy}{z} = \frac{dz}{-\frac{z^2+1}{y}} = dx$ şi din primele două obţinem $\frac{dy}{y} = -\frac{zdz}{z^2 + 1}$, de unde $y^2(z^2 + 1) = c_1$, iar dacă amplificăm prima cu z, a doua cu y, deducem $zdy + ydz + dx = 0,\ yz + x = c_2$.

1.24 Ataşăm sistemul $dx = \frac{dy}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{dz}{\frac{1}{y-x}}$, de unde $\frac{dx - dy}{\frac{1}{z}} = \frac{dz}{\frac{1}{y-x}}$ care antrenează $\frac{d(y - x)}{y - x} = -\frac{dz}{z}$ şi $(y - x)z = c_1$; înlocuim $z = \frac{c_1}{y - x}$ în prima ecuaţie şi obţinem $y'(x) = 1 - \frac{y - x}{c_1}$, care este o ecuaţie liniară cu soluţia $e^{\frac{x}{z(y-x)}}(y - x) = c_2$.

1.25 Avem sistemul simetric $\frac{dx}{-2tx} = \frac{dy}{-2ty} = \frac{dt}{x^2 + y^2 - t^2}$; din primele două rezultă $x = yc_1$; apoi $\frac{xdx + ydy + tdt}{-t(x^2 + y^2 + t^2)} = \frac{dx}{-2tx}$ de unde $x^2+y^2+t^2 = xc_2$.

2.4 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul I

2.5 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul I

Ecuaţia liniară şi omogenă are forma

$$a_1(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1}+a_2(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+a_n(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n}=0, \quad (2.28)$$

unde a_i sunt funcţii de clasă $C^1(D),\ D\subset R^n,\ \sum_{i=1}^{n}a_i^2>0,\ \forall x\in D$, iar $z=z(x_1,\ldots,x_n)$ este o funcţie ce trebuie determinată.
Din teorema (2.3.1), soluţia ecuaţiei este o integrală primă oarecare a sistemului simetric

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1,\ldots,x_n)}=\frac{dx_2}{a_2(x_1,\ldots,x_n)}=\ldots=\frac{dx_n}{a_n(x_1,\ldots,x_n)}. \quad (2.29)$$

deci, dacă mai ţinem cont de teorema (2.3.3) soluţia generală a ecuaţiei liniare şi omogene este:

$$u(x)=W(U_1(x_1,\ldots,x_n),U_2(x_1,\ldots,x_n),\ldots,U_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)), \quad (2.30)$$

unde $U_1,\ldots,U_{n-1}$ sunt integrale prime independente.
Sistemul (2.29) se mai numeşte *caracteristic*, iar soluţia lui *curbă caracteristică*.

Ecuaţia cvasiliniară are forma

$$a_1(x_1,\ldots,x_n,z)\frac{\partial z}{\partial x_1}+a_2(x_1,\ldots,x_n,z)\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+a_n(x_1,\ldots,x_n,z)\frac{\partial z}{\partial x_n}=$$

$$=a(x_1,\ldots,x_n,z), \quad (2.31)$$

unde a_i sunt funcţii de clasă $C^1(D),\ D\subset R^{n+1},\ \sum_{i=1}^{n}a_i^2>0,\ \forall(x,z)\in D$, iar $z=z(x_1,\ldots,x_n)$ este o funcţie ce trebuie determinată.
Căutăm soluţia ecuaţiei (2.31) sub forma implicită

$$u(x_1,\ldots,x_n,z(x_1,\ldots,x_n))=0. \quad (2.32)$$

Folosind derivarea funcţiilor definite implicit, ecuaţia (2.31) poate fi pusă sub forma

$$a_1(x_1,\ldots,x_n,z)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+a_n(x_1,\ldots,x_n,z)\frac{\partial u}{\partial x_n}+a(x_1,\ldots,x_n,z)\frac{\partial u}{\partial z}=0. \quad (2.33)$$

care este liniară şi omogenă având drept sistem caracteristic, următorul sistem simetric de ordinul $n+1$.

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1,\ldots,x_n,z)} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(x_1,\ldots,x_n,z)} = \frac{dz}{a(x_1,\ldots,x_n,z)},$$

cu soluţia generală

$$u(x_1,\ldots,x_n,z) = F(U_1(x_1,\ldots,x_n,z),\ldots,U_n(x_1,\ldots,x_n,z))$$

unde $U_1,\ldots,U_n$ sunt n integrale prime independente, iar F este o funcţie de clasă C^1 pe un domeniu D_0. Deci soluţia ecuaţiei cvasiliniare (2.31) este

$$F(U_1(x_1,\ldots,x_n,z),\ldots,U_n(x_1,\ldots,x_n,z)) = 0, \tag{2.34}$$

care defineşte soluţia $z = z(x_1,\ldots,x_n)$ implicit.

Exemplul 2.5.1 *Să determinăm suprafaţa $z = z(x,y)$ care satisface ecuaţia liniară*

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Soluţie Asociem ecuaţiei liniare omogene sistemul caracteristic de ordin 2 pe domeniul $R^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x},$$

care are integrala primă $U_1(x,y) = x^2 - y^2$, deci soluţia este

$$z(x,y) = F(U(x,y)),$$

unde F este o funcţie de clasă C^1 pe un interval real.

Exemplul 2.5.2 *Să determinăm soluţia ecuaţiei*

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + (x_3+z)\frac{\partial z}{\partial x_2} + (x_2+z)\frac{\partial z}{\partial x_3} = x_2 + x_3.$$

Soluţie Ecuaţia este cvasiliniară. Ataşăm sistemul simetric

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_3+z} = \frac{dx_3}{x_2+z} = \frac{dz}{x_2+x_3}.$$

Deducem prin adunarea ultimelor trei rapoarte că

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{d(x_2+x_3+z)}{2(x_2+x_3+z)},$$

de unde prin integrare deducem

$$\ln|x_1| = \frac{1}{2}\ln|x_2 + x_3 + z| + \frac{1}{2}\ln|c_1|,$$

deci $x_2 + x_3 + z = c_1 x_1^2$. Apoi din

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{d(x_2 - x_3)}{x_3 - x_2},$$

deducem $\ln|x_1| = -\ln|x_2 - x_3| + \ln|c_2|$, de unde $x_1(x_2 - x_3) = c_2$. Din

$$\frac{dx_1}{x_1} = -\frac{d(z - x_3)}{z - x_3}$$

deducem $x_1(z - x_3) = c_3$. Soluţia este funcţia z, definită implicit de

$$F\left(\frac{x_2 + x_3 + z}{x_1^2}, x_1(x_2 - x_3), x_1(z - x_3)\right) = 0.$$

Problema Cauchy. Cazul n=2 Se consideră ecuaţia

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z). \tag{2.35}$$

Problema Cauchy revine la determinarea suprafeţei $z = z(x,y)$ care conţine curba dată parametric

$$(\Gamma)\begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \quad\quad s \in I, \\ z = h(s) \end{cases} \tag{2.36}$$

unde f, g, h sunt funcţii de clasă $C^1(I),\ I \subset R$ şi $f'^2 + g'^2 + h'^2 \neq 0$.

Teorema 2.5.1 *Presupunem că $P^2 + Q^2 \neq 0$ pe un domeniu din R^2 şi*

$$\Delta = \begin{vmatrix} P & Q \\ f' & g' \end{vmatrix} \neq 0,\ \forall s \in I. \tag{2.37}$$

Atunci problema Cauchy (2.35) , (2.36) are soluţie unică definită într-o vecinătate a curbei Γ.

De multe ori curba Γ din problema Cauchy este dată sub forma

$$\begin{cases} g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

unde g_1, g_2 sunt funcţii de clasă C^1 pe $D \subset R^3$, cu matricea iacobiană $\dfrac{D(g_1, g_2)}{D(x, y, z)}$ de rang 2. Pentru determinarea practică a suprafeţei ataşăm un sistem de forma

$$\begin{cases} U_1(x, y, z) = c_1 \\ U_2(x, y, z) = c_2 \\ g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

care exprimă faptul că prin orice punct de pe curbă trece o soluţie a sistemului caracteristic. Prin eliminarea necunoscutelor x, y, z se obţine o legătură între integralele prime, de forma

$$\psi(c_1, c_2) = 0$$

care reprezintă condiţia de comaptibilitate şi conduce la o soluţie sub formă implicită.

Exemplul 2.5.3 *Să determinăm suprafaţa dată de ecuaţia*

$$2xz\frac{\partial z}{\partial x} + 2yz\frac{\partial z}{\partial y} + x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

şi care conţine curba $\Gamma \begin{cases} x = 2 \\ y^2 + z^2 = y. \end{cases}$

Soluţie Să aflăm mai întâi curbele caracteristice, adică soluţiile sistemului simetric

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2}.$$

Deducem $\dfrac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{2z(x^2 + y^2 + z^2)} = \dfrac{dx}{2xz}$, de unde găsim $x^2 + y^2 + z^2 = c_1 x$. Din primele două rapoarte rezultă imediat $y = xc_2$. Pentru reprezentarea parametrică a curbei de forma $\begin{cases} x = 1 \\ y = y \\ z = h(y) \end{cases}$, determinantul definit în formula (2.37) $\Delta = \begin{vmatrix} 2xz & 2yz \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ rezultă nenul, dacă pe domeniul ales $z \neq 0$. Apoi formăm sistemul

$$\begin{cases} y = c_2 x \\ x^2 + y^2 + z^2 = c_1 x \\ x = 2 \\ y^2 + z^2 = y. \end{cases}$$

Eliminând necunoscutele x, y, z se obţine condiţia de compatibilitate $c_2 - c_1 + 2 = 0$, care conduce la $x^2 + y^2 + z^2 - y - 2x = 0$.

2.5.1 Probleme propuse

Rezolvaţi următoarele ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul I omogene:

2.1 $y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

2.2 $(1+x^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} + xy\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

2.3 $z\dfrac{\partial u}{\partial x} + (x-z)^2\dfrac{\partial u}{\partial y} + x\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$

2.4 $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + (x+y)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$

2.5 $x(y^2-z^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} - y(x^2+z^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} + z(x^2+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$

2.6 $x(y-z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + y(z-x)\dfrac{\partial u}{\partial y} + z(x-y)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$

2.7 $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} - z^2\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$

2.8 $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$

2.9 $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + (x+y+z)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$

2.10 $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - 2x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} - x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_3} = 0$

2.11 $(x_3x_4 - x_1x_2^2)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + x_3^2\dfrac{\partial u}{\partial x_3} + x_3x_4\dfrac{\partial u}{\partial x_4} = 0$

2.12 $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + x_n\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0$

2.13 $a_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + a_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + a_n\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0,\ a_i \in R$

2.14 $x_1^2\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2^2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+x_n^2\frac{\partial u}{\partial x_n}=0,.$

Determinaţi soluţia generală a ecuaţiilor cvasiliniare, sau reductibile la ecuaţiii cvasiliniare:

2.15 $2y\frac{\partial z}{\partial x}+3x^2\frac{\partial z}{\partial y}+6x^2y=0$

2.16 $y\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}=-1-z^2$

2.17 $(y+x)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-x)\frac{\partial z}{\partial y}=z$

2.18 $2xz\frac{\partial z}{\partial x}+2yz\frac{\partial z}{\partial y}=z^2-x^2-y^2$

2.19 $xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}=x$

2.20 $u\frac{\partial u}{\partial x}+(u^2-x^2)\frac{\partial u}{\partial y}=-x$

2.21 $z\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial z}{\partial y}=y-x$

2.22 $xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}=x$

2.23 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}$

2.24 $xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}=-xy$

2.25 $x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u$

2.26 $x(y-z)\frac{\partial u}{\partial x}+y(z-x)\frac{\partial u}{\partial y}+z(x-y)\frac{\partial u}{\partial z}=u(y-z)$

2.27 $(1+\sqrt{u-x_1-x_2})\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}=2$

2.28 $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=x^2+2u$

2.29 $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = ku.$

Determinaţi suprafeţele $z = z(x, y)$ care includ curbele indicate:

2.30 $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z, \ (\Gamma) : x = y, z = x^2$

2.31 $x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0, \ (\Gamma) : y = 1, z = x^2$

2.32 $xy^2\frac{\partial z}{\partial x} + x^2y\frac{\partial z}{\partial y} = z(x^2 + y^2), \ (\Gamma) : y = 1, x^2 + z^2 = 1$

2.33 $(x - y)\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z, \ (\Gamma) : x = y, z = x^2$

2.34 $(1 + \sqrt{z - x - y})\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2, \ (\Gamma) : x = y, z = 0$

2.35 $(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay, \ a, b, c \in R \ (\Gamma) : x = y = z$

2.36 $(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} - (y - 1)\frac{\partial z}{\partial y} = z - 1, \ (\Gamma) : x = 1, z = y^2$

2.37 $(y^2 + z^2 - x^2)\frac{\partial z}{\partial x} - 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = -2xz, \ (\Gamma) : x = 1, y^2 + z^2 = 2.$

Rezolvaţi problemele Cauchy:

2.38 $x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \ z(1, y) = 1 + y$

2.39 $(x + y)\frac{\partial z}{\partial x} + (x - y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \ z(x, 0) = -x^2$

2.40 $\sqrt{x}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{z}\,\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \ u(x, y, 1) = x - y$

2.41 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z, \ z|_{\{x^2+y^2=1\}} = x$

2.42 $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = x^2, \ u(1, y, z) = y^2 - z$

2.43 $x(y^2 - z^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} - y(x^2 + z^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} + z(x^2 + y^2)\dfrac{\partial u}{\partial z} = u(x^2 + y^2)$, $u(x, y, 1) = y^2$

2.44 $2x^3\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y^3 + 3x^2y)\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2x^2z\dfrac{\partial u}{\partial z} = ux^2$, $u(1, y, z) = y^2 + z$

2.45 $(x - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = u$, $u(x, y, 1) = x^2$

2.46 $2xz\frac{\partial z}{\partial x} + 2yz\frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - x^2 - y^2$, $z(x, 1, z) = x$

2.47 $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u$, $u|_{\{x=y\}} = x^3$

2.48 $xz\dfrac{\partial z}{\partial x} + yz\dfrac{\partial z}{\partial y} = -xy$, $z(x, 2) = x$.

Capitolul 3

Integrale vectoriale